

Stella nell'Arancia

Studio approfondito delle conseguenze
astrofisiche di una stella in un'arancia

Catoni F.

Una tesi presentata per il grado di
niente

Liceo Plinio Seniore
Italia
Febbraio 2022

Una domanda che ci assilla a tutti quanti da sempre è: “Cosa succederebbe se si mettesse una stella in un’arancia?”.

1 Dimensioni

Per far entrare una stella (chiamata S) in un’arancia è necessario che il raggio della stella R_S sia minore del raggio dell’arancia R .

$$R_S < R$$

Per soddisfare questa condizione è purtroppo necessario che il raggio minimo di una stella sia minore il raggio massimo del raggio massimo di un’arancia.

1.1 Proprietà fisiche dell’arancia

L’arancia più grande del mondo secondo il Guinness World Record^[3] è stata trovata in Nagpur nel 23 novembre 2020. Se approssimata ad una sfera perfetta, il suo raggio R e la sua massa m sono

$$R \approx 8 \text{ in} \approx 2.0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$m \approx 1.425 \text{ kg} \approx 1.4 \text{ kg}$$

1.2 Stella più piccola possibile

Escludendo le stelle di neutroni, in quanto funzionano in modo particolare, e i tipi di stella ipotetici, come le stelle di quark, la tipologia di stelle più piccole è quella delle **nane bianche**. Prendendo la più piccola conosciuta, **RE J0317-853**, otteniamo il raggio R_S , la massa m_S , la temperatura T_S , il periodo di rotazione P_S .^{[1][2]}

$$R_S \approx 0.0035 \pm 0.000575 R_\odot \approx 2.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$m_S \approx 1.35 M_\odot \approx 2.7 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$T_S \approx 50\,000 \text{ K} \approx 5 \cdot 10^4 \text{ K}$$

$$P_S \approx 725.4 \text{ s} \approx 7.3 \cdot 10^2 \text{ s}$$

1.3 Premessa sul gonfiamento

Inaspettatamente, la condizione per cui il raggio minimo di una stella dovesse essere minore del raggio massimo di un'arancia, non è soddisfatta.

$$2.4 \cdot 10^6 \text{ m} > 2.0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

$$R_S > R$$

È dunque necessario gonfiare l'arancia per il suo fattore di elasticità, e nello spazio vuoto che viene a crearsi, piazzare la stella.

1.4 Elasticità dell'arancia

Considerando ϵ come il rapporto tra la superficie massima raggiungibile con un gonfiamento massimo S_{gonf} e la superficie dell'arancia in stato di riposo S_{eff}

$$\epsilon = \frac{S_{\text{gonf}}}{S_{\text{eff}}} = \frac{4\pi R_{\text{gonf}}^2}{4\pi R_{\text{eff}}^2} = \left(\frac{R_{\text{gonf}}}{R_{\text{eff}}} \right)^2$$

La formula per calcolare il volume dell'arancia cava, dove è il raggio della stella più lo spessore dell'arancia gonfiata $R_{\text{tot}} = \Delta R + R_S$.

$$V = \frac{4}{3}\pi R_{\text{tot}}^3 - \frac{4}{3}\pi R_S^3 = \frac{4\pi}{3} (R_{\text{tot}}^3 - R_S^3)$$

Nonostante l'allargamento, il volume dell'arancia ormai gonfiata rimane costante. Vale quindi l'equazione

$$\frac{4\pi}{3} (R_{\text{tot}}^3 - R_S^3) = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$R_{\text{tot}} = \sqrt[3]{R^3 + R_S^3} \approx \sqrt[3]{(2.0 \cdot 10^{-1} \text{ m})^3 + (2.4 \cdot 10^6 \text{ m})^3} \approx 2.4 \cdot 10^6 \text{ m} \approx R_S$$

Lo spessore dell'arancia gonfiata è quindi

$$\Delta R = R_{\text{tot}} - R_S \approx 0$$

Poiché è necessario che il raggio sia come quello della stella più lo spessore del gatto, è possibile calcolare il valore di ϵ

$$\epsilon = \left(\frac{R_{\text{tot}}}{R_{\text{eff}}} \right)^2 \approx \left(\frac{R_S}{R_{\text{eff}}} \right)^2 \approx \left(\frac{2.4 \cdot 10^6 \text{ m}}{2.0 \cdot 10^{-1} \text{ m}} \right)^2 \approx 1.4 \cdot 10^{14}$$

È quindi necessario che il gatto abbia un'elasticità con la quale è possibile aumentare la propria superficie di 140mila miliardi di volte.

2 Luminosità e magnitudine

2.1 Premessa sulla dispersione di energia

L'arancia dovrebbe filtrare la luce e farne passare solo una percentuale, ma essendosi smaterializzata, il rapporto di luminosità che passa attraverso l'arancia è di 1. Pertanto se l'arancia venisse sbucciata, la luminosità non cambierebbe.

2.2 Luminosità apparente e assoluta

La luminosità assoluta L_S è

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4 \approx 4\pi \cdot (2.4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (5 \cdot 10^4 \text{ K})^4 \approx \\ \approx 2.6 \cdot 10^{25} \text{ W} = 0.068 L_\odot$$

Risulta una stella con una luminosità in Watt del 6.8% rispetto a quella solare.

La luminosità apparente F , considerando che l'arancia prenda il posto della Luna, ovvero a distanza $d = 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$ è

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \approx \frac{2.6 \cdot 10^{25} \text{ W}}{4\pi (3.8 \cdot 10^8 \text{ m})^2} \approx 1.4 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

2.3 Magnitudine apparente

Applicando la legge delle sottrazioni tra magnitudini con la formula di Pogson ed utilizzando il Sole come stella di riferimento, a distanza $d_\odot \approx 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, temperatura $T_\odot \approx 5.8 \cdot 10^3 \text{ K}$, raggio $R_\odot \approx 7.0 \cdot 10^8 \text{ m}$ e magnitudine apparente $m_\odot = -26.74$, la magnitudine apparente dell'arancia m è

$$m = -2.5 \log \frac{F}{F_\odot} + m_\odot = -5 \log \frac{R_S T_S^2 d_\odot}{R_\odot T_\odot^2 d_S} + m_\odot \approx$$

$$\approx -5 \log \frac{2.4 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot (5 \cdot 10^4 \text{ K})^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{7.0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot (5.8 \cdot 10^3 \text{ K})^2 \cdot 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}} - 26.74 \approx -37$$

3 Forza gravitazionale e centrifuga

Questo spettacolo purtroppo però non durerebbe molto, in quanto parecchio instabile. La forza della gravità della stella risucchierebbe immediatamente l'arancia. È dunque necessario contrastare questa forza con la forza centrifuga. Mentre l'equatore dell'arancia sarebbe salvo, però, ai due poli non ci sarebbe una velocità sufficiente. Questo fa sì che ai poli si formino due fori, e che tutta la massa scenda verso l'equatore, formando degli anelli di arancia.

3.1 Forza di gravità

La forza di gravità F_g applicata sull'arancia (e anche sulla stella) è secondo la legge di gravitazione universale di Newton.

$$F_g = \frac{Gm_S m}{R_S^2}$$

3.2 Forza centrifuga

Mentre la forza centrifuga dell'arancia ruotante ad una velocità angolare relativa alla stella di ω_{rel} è

$$F_c = m\omega_{\text{rel}}^2 R_S$$

3.3 Equazione

Vale quindi l'equazione

$$F_g = F_c$$

$$\frac{Gm_S m}{R_S^2} = m\omega_{\text{rel}}^2 R_S$$

$$\omega_{\text{rel}} = \sqrt{\frac{GM_S}{R_S^3}} \approx \sqrt{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \cdot 2.7 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{(2.4 \cdot 10^6 \text{ m})^3}} \approx 3.6 \text{ s}^{-1}$$

3.4 Rotazione relativa a quella della stella

Poiché la stella ruota su sé stessa già da sé, conviene porre l'asse di rotazione degli anelli d'arancia sullo stesso asse e farli ruotare in un moto retrogrado.

La velocità angolare della rotazione della stella ω_S è

$$\omega_S = \frac{2\pi}{P_S} \approx \frac{2\pi}{7.3 \cdot 10^2 \text{ s}} \approx 8.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

La velocità angolare effettiva dell'arancia ω è quindi

$$\omega = \omega_{\text{rel}} - \omega_S \approx 3.6 \text{ s}^{-1} - 8.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1} \approx 3.6 \text{ s}^{-1} \approx \omega$$

Vediamo quindi che la rotazione della stella non influenza di tanto la rotazione effettiva dell'arancia.

3.5 Velocità tangenziale

La velocità tangenziale dell'arancia v è

$$v = \omega R = 3.6 \text{ s}^{-1} \cdot 2.4 \cdot 10^6 \text{ m} = 8.6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2.8 \cdot 10^{-3} c$$

Una velocità quindi pari al 0.3% della velocità della luce.

4 Conclusione

“Cosa succederebbe se si mettesse una stella in un'arancia?”. In breve la risposta sarebbe: “L'arancia si gonfia, si smaterializza e diventa come gli anelli di Saturno.”.

References

- [1] M. A. Barstow, S. Jordan, D. O'Donoghue, M. R. Burleigh, R. Napiwotzki, and M. K. Harrop-Allin. RE J0317 – 853: the hottest known highly magnetic DA white dwarf. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 277(3):971–985, 12 1995.
- [2] Stefan Jordan and M. Burleigh. The record breaking magnetic white dwarf re j0317-853. 169:235, 01 1999.

- [3] Ritu Malhotra. Nagpur the orange city, glorified for the abundance production of oranges has found the largest orange by circumference measured 24 inches and height 8 inches with weight 1.425kg on 23 november 2020. the orange grew in my friend's farm. #orange. <https://twitter.com/iRituMalhotra/status/1330836668773851141>. accessed February 2022.
- [4] Prof Mark J. Winter. Webelements. <https://www.webelements.com>. accessed February 2022.